

---

# TIME DELAY EMBEDDING

---

Murat Koptur

30 Kasım 2025

## ÖZET

Gözlemlenmiş tek bir zaman serisinden sistemin faz uzayını yeniden inşa etmek, kaotik ve karmaşık sistemlerin analizinde kritik öneme sahiptir. Bu yazıda Time-Delay Embedding (TDE) yönteminin teorik temeli, parametre seçimi, hesaplama adımları ve klasik bir örnek (Lorenz Attractor) üzerinden nasıl uygulanacağı anlatılacaktır.

## 1 Giriş

Verilen bir zaman serisi

$$x(t) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$$

için, gecikmeli vektörler ile aşağıdaki gibi bir faz uzayı oluşturalım:

$$\mathbf{X}(t) = (x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)).$$

Burada:

- $m$  : gömme boyutu (embedding dimension)
- $\tau$  : zaman gecikmesi (time delay)

Bu dönüşüm sonucunda elimizde  $N - (m - 1)\tau$  satır ve  $m$  sütunlu bir matris olur; bu matris, sistemin yeniden inşa edilmiş faz uzayıdır.

Takens Teoremi'ne göre, aşağıdaki koşullar altında uygun gömme boyutu  $m$  ve gecikme  $\tau$  seçildiğinde, yeniden inşa edilen faz uzayı topolojik olarak orjinal sisteme diffeomorfik ya da denktir (Takens 1981):

- Sistem deterministik ve düzgün (smooth) olmalıdır.
- Ölçülen / gözlemlenen zaman serisi gürültü içermemelidir.
- Gözlenen değişken sistemin dinamiklerini yansıtmalıdır.

Gecikme  $\tau$  seçimi kritik öneme sahiptir. Eğer  $\tau$  çok küçükse, gömme vektörünün bileşenlerinin korelasyonu yüksek olur ve yeterli bilgi elde edilemez. Diğer yandan  $\tau$  çok büyükse, bileşenler arasında ilişki zayıflar ve sistemin dinamiği yok olabilir.  $\tau$  gecikme parametresinin seçiminde iki popüler yöntem bulunmaktadır:

- Average Mutual Information (AMI)*: Average Mutual Information,  $s(t)$  ile  $s(t - \tau)$  arasındaki bilgi miktarını ölçer. Ortak bilgi azaldıkça iki değişken daha bağımsız hale gelir. AMI, korelasyonun doğrusal olmayan bağımlılıkları da yakalaması bakımından ACF'ye göre daha geniştir.

$$I(\tau) = \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \log \left( \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j} \right)$$

Burada:

- $p_i$  :  $s(t)$  değerlerinin histogramdan elde edilen marjinal olasılık dağılımı,

- $p_j : s(t - \tau)$  değerlerinin marjinal dağılımı,
- $p_{ij}(\tau) : \text{ortak histogramdan elde edilen ortak olasılık dağılımıdır.}$

Gecikme süresi olarak genellikle **AMI eğrisinin ilk yerel minimum noktası** seçilir:

$$\tau^* = \arg \min_{\tau > 0} (I(\tau)).$$

- *Otokorelasyon Fonksiyonu (ACF)*: ACF,  $s(t)$  ile  $s(t - \tau)$  arasındaki doğrusal bağımlılığı ölçer. Daha basit fakat yalnızca lineer ilişkileri yakalayan bir yöntemdir. Çoğu çalışmada gecikme süresi, korelasyonun eksponansiyel olarak aşağıdaki seviyeye düştüğü nokta olarak seçilir:

$$R(\tau^*) = \frac{1}{e} R(0).$$

Gömme boyutu  $m$  çok düşük seçildiğinde, farklı noktalar aynı faz uzayı koordinatlarına eşlenir, aslında birbirlerinden uzak olan noktalar faz uzayında komşu hale gelir ve *katlanma* (folding) problemi ortaya çıkar. Çok yüksek seçildiğinde ise hesaplama (computation) maliyeti yükselir. Gömme boyutunun  $m$  seçiminde sık olarak False Nearest Neighbors (FNN) metodu kullanılır (Cao 1997). Bir noktaya  $m$  boyutlu gömmede en yakın komşu görünen bir nokta, gömme boyutu  $m + 1$ 'e çıkarıldığında komşuluk ilişkisini korumuyorsa, bu komşu *false neighbor* olarak kabul edilir. Amaç, gömme boyutu  $m$  yeterince büyük olduğunda yanlış komşu oranının yaklaşık sıfıra indiği boyutu belirlemektir:

$$m^* = \arg \min_m \text{FNN}(m) \approx 0.$$

Bu yaklaşım, sistemin katlanmadan arındırılmış, doğru topolojik yapıda yeniden inşa edilmesini sağlar. Teorik olarak, eğer sistemin gerçek boyutu  $d$  ise, genelde  $m \geq 2d + 1$  yeterli olacak biçimde önerilir.

## 2 Lorenz Çekicisi ile Bir Uygulama

Tüm hesaplamalar ve görselleştirmeler için *Python 3.12*, *NumPy 1.23.1* (Harris ve diğ. 2020), *Matplotlib 3.5.2* (Hunter 2007), *nolds 0.5.2* (Schölzel 2019) ve *Teaspoon 1.5.29* (Khasawneh ve diğ. 2025) kullanılmıştır.

Lorenz çekicisi, deterministik kaosun klasik örneklerinden biridir ve üç denklemlilik bir diferansiyel denklem sistemi olarak tanımlanır. Bu örnekte yalnızca  $x(t)$  bileşenini gözlem olarak alarak, tek değişkenli bir zaman serisinden faz uzayını yeniden inşa edeceğiz.

Lorenz sistemi aşağıdaki diferansiyel denklemler ile verilir:

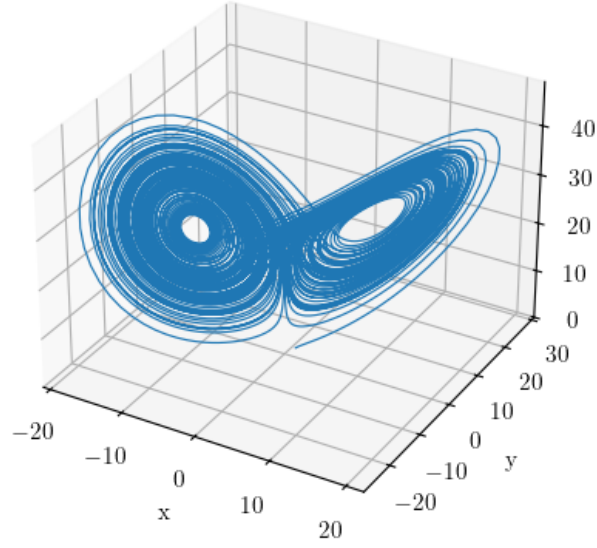
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

burada kaotik rejim için parametreler:

$$\sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad \beta = \frac{8}{3}$$

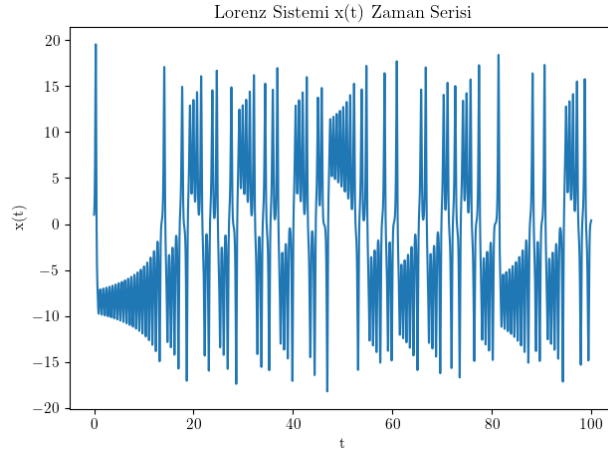
olarak alınır.

## Lorenz Çekicisi



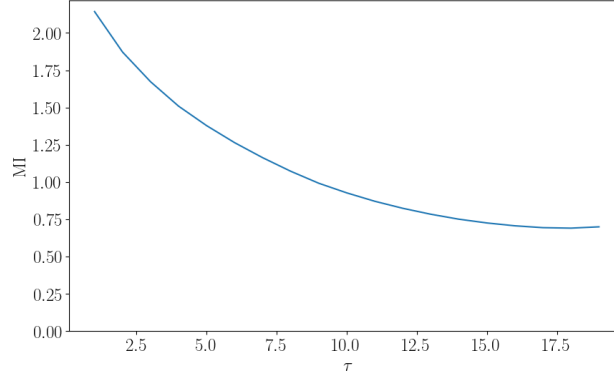
Şekil 1: Lorenz sisteminin  $(1, 1, 1)$  başlangıç değerleri için nümerik çözümü ( $\Delta t = 0.01, N = 10000$ ).

Bu çalışmada yalnızca  $x(t)$  serisini gözlemlediğimizi varsayarak, diğer iki değişkenin ( $y(t)$  ve  $z(t)$ ) doğrudan gözlemlenmediği bir durumu ele alıyoruz. Amaç, sadece  $x(t)$  serisinden hareketle Takens teoremi doğrultusunda sistemin faz uzayını yeniden inşa etmektir.

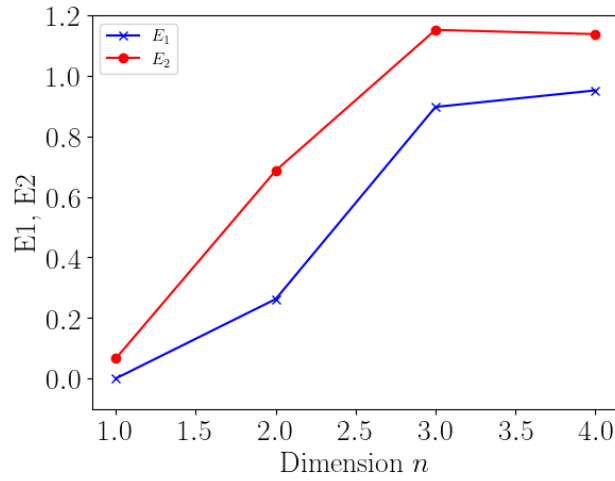


Şekil 2: Lorenz sisteminin  $x(t)$  gözlem serisi.

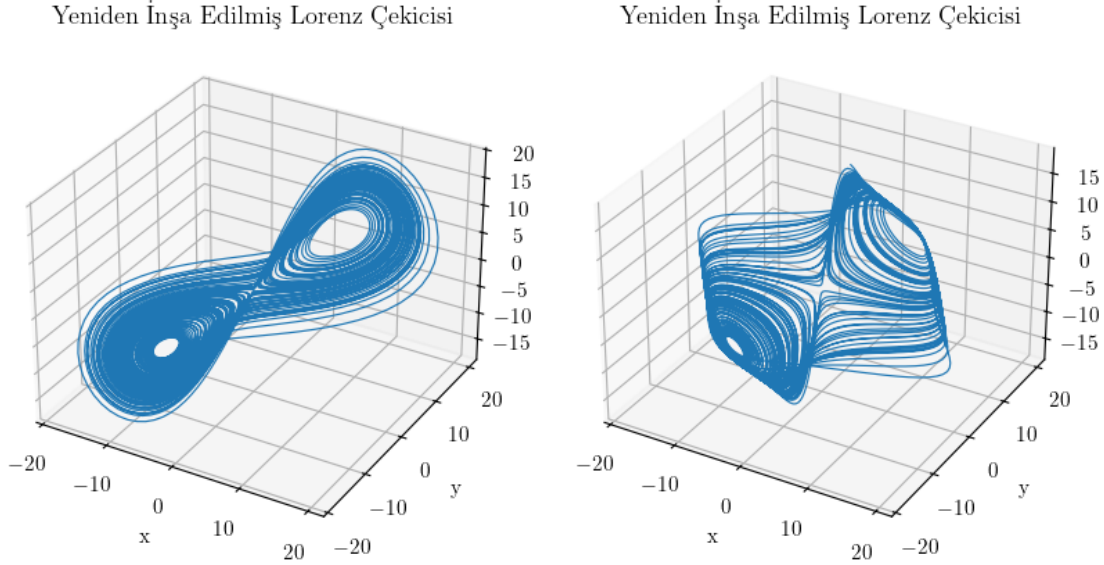
Gecikme parametresi  $\tau$ 'nın belirlenmesi için AMI yöntemi uygulanmış ve Şekil 3'te  $I(\tau)$  eğrisi elde edilmiştir. AMI, doğrusal olmayan bağımlılıkları da yakalayabildiği için özellikle kaotik sistemler için otomatik gecikme seçimi açısından tercih edilir. Hesaplama sonucunda  $\tau^* = 18$  olarak bulunmuştur.

Şekil 3: Hesaplanan  $\tau$  vs  $MI$  grafiği.

Gecikme parametresi belirlendikten sonra gömme boyutu  $m$  iki farklı yol ile belirlenip hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. İlk olarak gömme boyutu  $m$  için teorik alt sınır, sistemin gerçek boyutunun ( $d = 3$ ) bilindiği varsayılarak  $m \geq 2d + 1$  kuralından  $m^* = 7$  olarak belirlenmiştir. Ayrıca False Nearest Neighbors (FNN) analizi gerçekleştirilmiştir. FNN analizi sonucu gömme boyutu  $m^* = 3$  olarak belirlenmiştir.

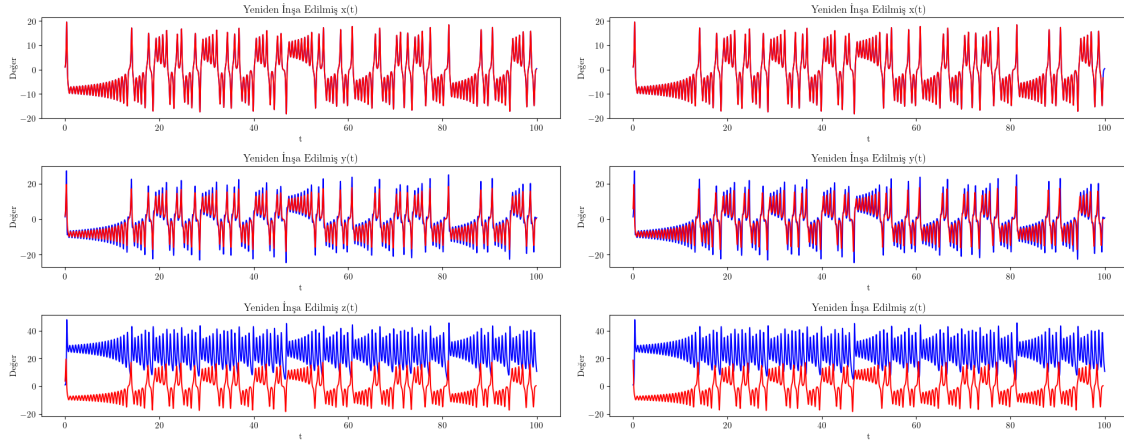
Şekil 4:  $n$  vs  $E1$  &  $E2$  grafiği.

Şekil 5'te, hem teorik hem de FNN yardımıyla seçilen parametreler kullanılarak yeniden inşa edilen sistemler görülmektedir. Sadece  $x(t)$  serisi kullanılarak elde edilen gömme uzayı, Lorenz çekicisinin topolojik yapısını başarılı bir şekilde yeniden üretmektedir.



Şekil 5: Teorik ve AMI ile elde edilen gömme boyutu ile yeniden inşa edilen Lorenz çekicileri

Şekil 6, yeniden inşa edilmiş faz uzayından elde edilen  $(x_{re}, y_{re}, z_{re})$  serileri ile Lorenz sisteminin gerçek  $(x, y, z)$  serilerinin karşılaştırmasını göstermektedir. Ayrıca  $z(t)$  zaman serisi için zaman ekseninde birebir örtüşme gözlemlenmesine de, yeniden inşa edilen serilerin geometrik özelliklerinin gerçek sistemle oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 6: Teorik ve AMI ile elde edilen gömme boyutu ile yeniden inşa edilen Lorenz çekicilerinin  $x$ ,  $y$  ve  $z$  serileri

Yöntemin başarısını sayısal olarak kontrol etmek için, Sample Entropy, Correlation Dimension, Maximal Lyapunov Exponent ve Hurst Exponent değerleri hem orjinal hem de yeniden inşa edilmiş seri ( $\tau^* = 18$ ) için hesaplanmıştır.

Tablo 1: Orjinal ve Yeniden İnşa Edilmiş Serilerin ( $\tau^* = 18$ ) İstatistiklerinin Karşılaştırılması

	$x$	$x_{re}$	$\% \Delta$	$y$	$y_{re}$	$\% \Delta$	$z$	$z_{re}$	$\% \Delta$
Sample Entropy	0.15532	0.15578	0.3%	0.15713	0.15564	-0.9%	0.27064	0.15551	-42.5%
Correlation Dimension	1.26927	1.27065	0.1%	1.23405	1.27063	3.0%	1.43388	1.27015	-11.4%
Lyapunov Exponent	0.00982	0.01056	7.5%	0.01059	0.01061	0.2%	0.01880	0.01066	-43.3%
Hurst Exponent	0.74581	0.72306	-3.0%	0.70881	0.74732	5.4%	0.62609	0.70649	12.8%

Tablo sonuçları,  $x(t)$  ve  $y(t)$  serilerinin yeniden inşasında TDE'nin yüksek doğrulukla çalıştığını göstermektedir. Sample Entropy, Correlation Dimension ve Lyapunov üssündeki farkların sırasıyla %0.1–3 aralığında kalması, manifoldun karmaşıklığının ve kaotikliğin büyük ölçüde korunduğunu doğrular. Özellikle  $y$  bileşeni için Lyapunov üssündeki yalnızca %0.2'lik fark, sistemin kaotik karakterinin doğru biçimde yeniden üretildiğine işaret etmektedir.

Buna karşılık  $z(t)$  bileşeninde gözlenen %40'ın üzerindeki Lyapunov ve entropi sapmaları, tek değişkenden yapılan embedding'in yüksek boyutlu Lorenz dinamiğinin  $z$  eksenindeki davranışı tam olarak yakalamada yetersiz kaldığını göstermektedir;  $x(t)$  gözlemi sistemin tüm durumunu taşımadığında TDE topolojiyi korusa bile metrik benzerlik bozulabilir.

### 3 Sonuç

Bu çalışmada, tek değişkenli bir zaman serisinden kaotik bir sistemin faz uzayını yeniden inşa etmek için Time Delay Embedding yaklaşımı uygulanmıştır. Gecikme  $\tau$  için AMI, gömme boyutu  $m$  için FNN yöntemleri kullanılmış ve Lorenz çekicisi üzerinde çalışma, yalnızca  $x(t)$  gözleminin sistemin dinamik yapısını büyük oranda geri kazanmada yeterli olduğunu göstermiştir.

### Kaynakça

- Cao, Liangyue (1997). *Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series*. Tech. rep., pp. 43–50.
- Harris, Charles R. et al. (Sept. 2020). “Array programming with NumPy”. In: *Nature* 585 (7825), pp. 357–362. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
- Hunter, John D. (2007). “Matplotlib: A 2D Graphics Environment”. In: *Computing in Science & Engineering* 9 (3), pp. 90–95. ISSN: 1521-9615. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
- Khasawneh, Firas A. et al. (Mar. 2025). “Teaspoon: A Python Package for Topological Signal Processing”. In: *Journal of Open Source Software* 10 (107), p. 7243. ISSN: 2475-9066. DOI: 10.21105/joss.07243.
- Schölzel, Christopher (June 2019). *Nonlinear measures for dynamical systems*. Version 0.5.2. DOI: 10.5281/zenodo.3814723. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3814723>.
- Takens, Floris (1981). “Detecting Strange Attractors in Turbulence”. In: *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*. Ed. by David Rand and Lai-Sang Young. Vol. 898. Lecture Notes in Mathematics. Springer, pp. 366–381. DOI: 10.1007/BFb0091924.